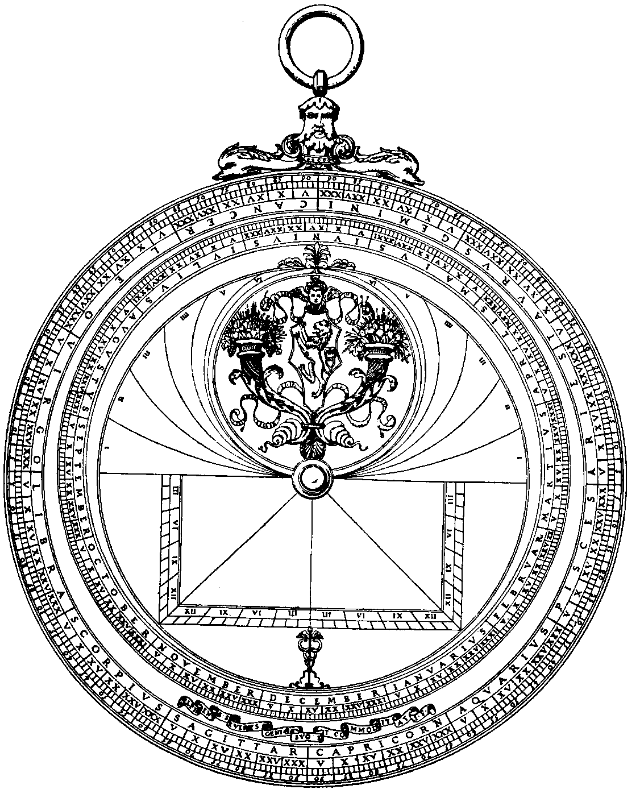
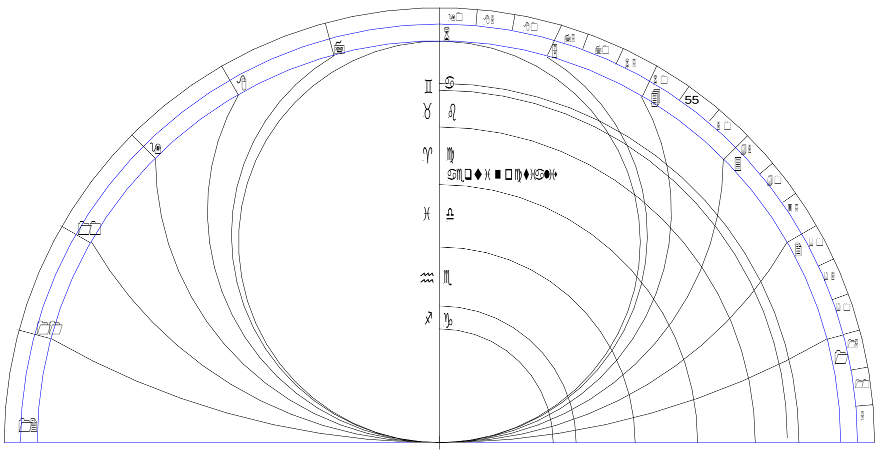
Quadrans vetus

Auf der Rückseite von Astrolabien, dem Dorsum befindet sich oftmals eine Skala zur Bestimmung der Temporalstunden, genannt Stundenquadrant oder *quadrans vetus* .



Zur Bestimmung der Temporalstunde muss die Mittagshöhe H der Sonne an diesem Tag bekannt sein, dann kann aus der momentanen Sonnenhöhe (näherungsweise) die aktuelle Temporalstunde bestimmt werden.

Der universelle Stundenquadrant
mit den Höhenlinien für 50 Grad nördl. Breite



Gliederung

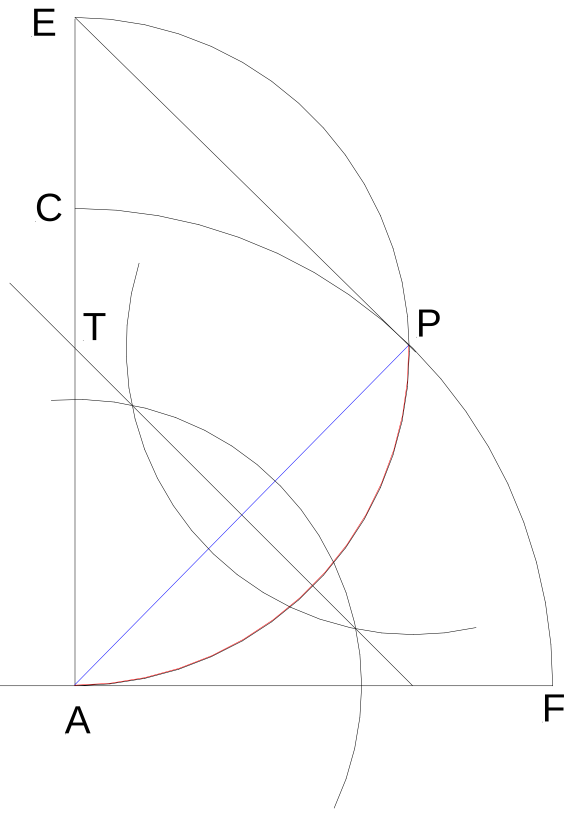
1. Konstruktion der Stundenkreise
2. Nachweis der Näherungsformel
3. Berechnung des Fehlers

1. Konstruktion der Stundenkreise

Der Quadrans vetus

Konstruktion der Stundenkreise

1. Kreis (A,r= AF = 1 LE)
2. Für die Stunde τ zeichne die Halbgerade AP durch A mit dem Winkel τ*15Grad
3. Der Mittelpunkt T des Stundenkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten AP und der Geraden AC
4. Gesuchter Stundenkreis K(T, r = AT)



2. Nachweis der Näherungsformel

Statt nach der exakten Formel werden die Temporalstunden mit der Näherung

$$\sin \tau = \sin h / \sin H \text{ bestimmt.}$$

Dabei ist τ die Temporalstunde

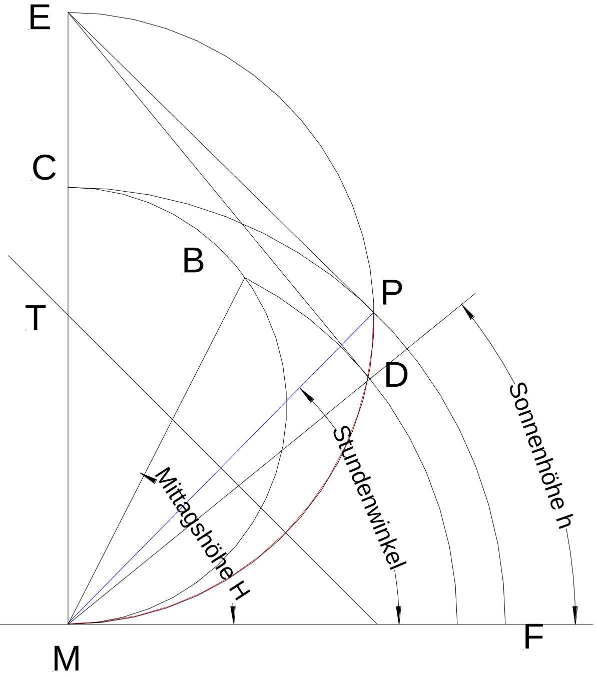
H die Mittagshöhe und

h die momentane Sonnenhöhe

Der Quadrans vetus

Nachweis der Näherungsformel

MC = MP = 1 LE und
$\sin \tau = 1 : ME$
Mittagshöhe sei H
MB = MD = sin H
Winkel FMD = DEM ist der momentane Höhenwinkel h mit
$\sin h = MD : ME = \sin H : ME$
daraus $\sin \tau = \sin h : \sin H$



3. Berechnung des Fehlers

Es folgt eine Fehlerdiskussion der Näherungsformel in Abhängigkeit von der geographischen Breite φ, der Sonnendeklination δ und der Zeit τ.

Die betrachtete Näherungsformel für die Ungleichen Stunden lautet in moderner Schreibweise:
(*) $\tau = 1/15 \arcsin \{ \sin h / \sin H \}$ oder $\sin \tau = \sin h / \sin H$

Dazu einige Vorüberlegungen:
Die Gleichen Stunden τ berechnet man exakt aus der Gleichung:
(I) $\sin h = \sin \delta * \sin \varphi + \cos\delta * \cos \varphi \sin \tau$
und die Länge des halben Tages t (h = 0) zu
(I)* $\cos t = - \tan \delta * \tan \varphi$

Damit ergibt sich die Mittagshöhe H für $\tau = 0$ aus (I) zu
(II) $\sin H = \sin \delta * \sin \varphi + \cos\delta * \cos \varphi$

Zur Zeit der Äquinoktien ($\delta = 0$!) gilt:
(I)* $\sin h = \cos \varphi \sin \tau$
(II)* $\sin H = \cos \varphi$

Setzt man beide Gleichung in die Näherungsformel ein, erhält man wieder
$\sin t = \sin h / \sin H$
d. h. genau den exakten Wert.

Zur Zeit der Äquinoktien ($\delta = 0$) ist die Näherungsformel für jede geographische Breite exakt richtig.

Um die Mittagszeit ($\tau = 90^0$) gilt mit h = H die Näherungsformel für alle Bereiche ebenfalls exakt Zur Bestimmung der Ungleichen Stunde berechnet man die Länge des ganzen Tages t aus
$\cos (t/2) = - \tan\delta * \tan\varphi$
z.B. für $\varphi = 30^0$, $\delta = 23{,}5^0$ $t/2 = 104{,}54^0$
erhält man t = 13,94 h = 836min d.h. für eine Temporalstunde th = 69,7 min
Zu dieser Zeit soll der Stundenquadrant 5 h oder 7 h anzeigen.

Dazu bestimmt man zuerst für eine vorgegebene Zeit th die exakte Höhe der Sonne h aus (I) und die entsprechende Mittagshöhe H aus (II). Mit der Näherungsformel (*) erhält man die am Instrument abgelesene Zeit und kann somit die Abweichung bestimmen.
Mit
$\varphi = 30^0$, $\delta = 23{,}5^0$ und th = 69,7 min die Höhe $h = 73{,}2^0$

Mit der Näherungsformel erhält man für die 1. Ungleiche Stunde $\tau = 5$, d.h. $\tau = 75^0$ die Sonnenhöhe $h = 73{,}7^0$.
Jetzt kann man in Gleichen Minuten den Fehler mit (I) zu 2,5 Minuten ausrechnen d.h. die Sonne benötigt noch 2,5 min um die exakte Höhe zu erreichen.

Bestimmung des Fehlers in der Näherungsformel

Man geht z.B. von de r geographische Breite $\phi = 30$ Grad und der Deklination $\delta = 23.5$ aus

Zuerst bestimmt man die Länge einer Temporalstunde $\phi := 30 \cdot \frac{\pi}{180}$ $\delta := 23.5 \cdot \frac{\pi}{180}$

Länge des halben Tages $\text{tläng} := \operatorname{acos}(-\tan(\phi) \cdot \tan(\delta))$

Umrechnung in Zeitminuten $\text{tlän} := \text{tläng} \cdot \frac{180}{\pi}$ $\text{tlän} = 104.5$ Grad $\text{th} := \frac{\text{tlän} \cdot 2}{3}$

die Temporalstunde dauert $\text{th} = 69.7$ Minuten

d.h. bei jeder Temporalstunde auf dem Stundenquadranten sind 69.7 gleiche Minuten vergangen. Die Sonnenhöhen h(i) zu den entsprechenden Temporalstunden von 0 (Sonnenaufgang) bis 6 (Mittag, Höhe H = h(0)) berechnen sich in Grad :

$i := 0, 1 .. 6$ $\text{tl}(i) := \text{tläng} \cdot \frac{i}{6}$ $h(i) := \operatorname{asin}\left[(\sin(\delta)) \cdot \sin(\phi) + \cos(\delta) \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\text{tl}(i))\right] \cdot \frac{180}{\pi}$

Die Sonnenhöhen nach der Näherungsformel sind für die jeweiligen ungleichen Stunden

$\tau(i) := (6 - i) \cdot \frac{\pi}{12}$ $\text{hh}(i) := \operatorname{asin}\left(\sin(\tau(i)) \cdot \sin\left(h(0) \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right) \cdot \frac{180}{\pi}$

Ergebnis:
Es ergeben sich Höhendifferenen zu den ganzen Temporalstunden, angegeben in Grad

$\text{diff}(i) := (\text{hh}(i) - h(i))$

Temporal stunden	exakt	nach der Näherungs formel	Differenz in Grad
$6 - i =$	$h(i) =$	$\text{hh}(i) =$	$\text{diff}(i) =$
6	83.5	83.5	0
5	73.2	73.7	0.5
4	58.3	59.4	1
3	43.3	44.6	1.4
2	28.4	29.8	1.4
1	13.8	14.9	1.1
0	$-1.6 \cdot 10^{-15}$	0	$1.6 \cdot 10^{-15}$

Den Fehler in der Zeitrechnung bestimmt man folgendermaßen:
Für die Temporalstunde τ = 5 (d.h.69.7 gleiche Minuten) gilt z.B. exakt die Sonnenhöhe h(1) = 73.2 Grad.
Nach der Näherungsformel ist die Sonnenhöhe aber 73.7 Grad, d.h. die gleichen Stunden ergeben eine Zeit von 67.2 Minuten.
Der Fehler beträgt 2.5 Zeitminuten.

Allgemeine Berechnung:

$$\tau\tau(i) := \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi \cdot h(i)}{180}\right)\right) - \sin(\delta)\cdot\sin(\phi)}{\cos(\phi)\cdot\cos(\delta)} \qquad \tau n(i) := \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi \cdot hh(i)}{180}\right)\right) - \sin(\delta)\cdot\sin(\phi)}{\cos(\phi)\cdot\cos(\delta)}$$

$$\tau 1(i) := \operatorname{asin}(\tau\tau(i))\cdot\frac{12}{\pi} \qquad \tau n1(i) := \operatorname{asin}(\tau n(i))\cdot\frac{12}{\pi}$$

$$\tau 11(i) := (6 - \tau 1(i))\cdot 60 \qquad \tau n11(i) := (6 - \tau n1(i))\cdot 60 \qquad \mathrm{diff}(i) := \tau 11(i) - \tau n11(i)$$

Temporal stunden	exakte gleiche Minuten	Näherung gleiche Minuten	Fehler
$6 - i =$	$\tau 11(i) =$	$\tau n11(i) =$	$\mathrm{diff}(i) =$
6	0	0	0
5	69.7	67.2	2.5
4	139.4	134.6	4.8
3	209.1	202.7	6.3
2	278.8	272	6.7
1	348.5	343.3	5.2
0	418.2	418.2	$5.7\cdot 10^{-14}$

Für $\phi = 48^0$ und $\delta = 23{,}5$ erhält man

Temporal stunden $6 - i =$	exakte gleiche Minuten $\tau 11(i) =$	Näherung gleiche Minuten $\tau n11(i) =$	Fehler $diff(i) =$
6	$4.8i \cdot 10^{-6}$	$4.8i \cdot 10^{-6}$	0
5	79.3	73.2	6.1
4	158.5	147	11.5
3	237.8	222.2	15.5
2	317	300.1	16.9
1	396.3	382.8	13.5
0	475.5	475.5	0

Für $\phi = 48^0$ und $\delta = -23{,}5^0$ erhält man

Temporal stunden $6 - i =$	exakte gleiche Minuten $\tau 11(i) =$	Näherung gleiche Minuten $\tau n11(i) =$	Fehler $diff(i) =$
6	0	0	0
5	40.7	43.1	-2.3
4	81.5	85.8	-4.3
3	122.2	127.8	-5.5
2	163	168.6	-5.6
1	203.7	207.7	-3.9
0	244.5	244.5	$-2.8 \cdot 10^{-14}$