Siegfried Müller

Das Allgemeine Uhrentäfelchen von Regiomontan

Der Beitrag Unterfrankens zur Entwicklung der Astronomie der Neuzeit ist ganz erheblich. Zu erwähnen ist z.B. Johannes Petreius (1497 – 1550), geb. in Langendorf bei Hammelburg, der seit 1523 in Nürnberg lebte und dort eine damals berühmte, auf wissenschaftliche Werke spezialisierte Druckerei betrieb. Besondere Beachtung findet auch Johannes Schöner (1477 – 1547), der in Karlstadt/Main geboren wurde und von 1526 bis 1546 Professor für Mathematik am Nürnberger Gymnasium Aegidianum war. Außerordentliche Verdienste erwarb er sich mit der Herausgabe der Werke des wohl bedeutendsten Gelehrten des 15.Jahrhunderts von Regiomontan.

Johannes Regiomontanus (Hans Müller), geb. am 6. Juni 1436 im unterfränkischen Königsberg (Bayern), gest. am 6./8. Juli 1476 in Rom, darf als bekanntester Astronom und Mathematiker des Spätmittelalters bezeichnet werden. Der Name Regiomontanus geht auf die unter Humanisten gebräuchliche latinisierte Angabe des Geburtsortes Königsberg (Bayern) zurück und bürgerte sich im 16. Jh. ein. Regiomontanus selbst führte den Namen Johannes Molitoris (lat. für Müller) de Künigsperg / Monte regio.

Abbildung 1: Regiomontan in der Schedelschen Weltchronik

Am Beginn des 15.Jahrhunderts stand die Astronomie in Europa unter dem lähmenden Einfluss der Kirche, die eher an der philosophischen und theologischen Untermauerung ihrer Weltdeutung interessiert war. Vor allem wurden Feiertagsrechnungen und Kalender erstellt, die mit astrologischem Beiwerk versehen

großen Anklang fanden [1]. Einen neuen Anfang mit der Wiederentdeckung des antiken Wissens machte Regiomontan.
Neben vielen anderen bedeutenden Beiträge zur Astronomie und Mathematik ließ Regiomontan 1472 in seiner eigenen Druckerei in Nürnberg einen deutschen und lateinischen Kalender [2] setzen, der mit dem Jahr 1475 begann und Ende 1474 in den Handel kam. Der Aufbau des Kalenders war revolutionär neu und bis heute hat sich diese Struktur in den astronomischen Jahrbüchern, den sogenannten Ephemeriden, erhalten. Kolumbus führte auf seinen Reisen nach Amerika ein Exemplar mit sich.

Am Ende dieses Buches gab Regiomontan die Anleitung zum Gebrauch einer Reisesonnenuhr, die er als „Quadratum horarium generale“ bezeichnete, heute allgemein als „Allgemeines Uhrentäfelchen“ betitelt, während sie in Frankreich und den angelsächsischen Ländern wegen des auffallend kapuzenähnlichen Dreiecks in ihrer Zeichnung einfach den Namen Kapuziner (capucin) trug. Dieser Artikel beschäftigte mit dem Aufbau und der Geometrie dieses Uhrentäfelchens.

In der Vielzahl der Sonnenuhren ist es die sonderbarste und genialste Höhensonnenuhr, deren Entwicklung man bis ins Mittelalter verfolgen kann. Das Uhrentäfelchen hat seinen Ursprung in dem sogen. Venedigerschiffchen (Navicula de Venetiis), einer Sonnenuhr in Form eines Schiffchens. Daraus hat Regiomontan um 1457 die endgültige Form entwickelt. Berühmt ist seine Veröffentlichung im oben genannten „Deutschen Kalender“ von 1474 [2]. Viele solcher Uhrentäfelchen wurden im Laufe der Zeit hergestellt, die meisten aus Silber oder Messing. Die entscheidende Idee dabei ist, dass die exakten Formeln aus der sphärischen Trigonometrie durch einfach zu konstruierende Nomogramme umgesetzt werden. Im Übrigen gilt Regiomontan als Begründer der modernen sphärischen Geometrie.

Der erste bekannte Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion wurde erst 200 Jahre später geliefert und benötigte 7 Folioseiten. Einen Beweis in neuerer Zeit findet man in [4].

Ich möchte nun zeigen, dass man bereits mit dem Wissen der sphärischen Trigonometrie aus dem Additum der 11. Klasse das Uhrentäfelchen erklären kann.

Dazu benötigt man einige Formeln, die mit Hilfe des nautischen Dreiecks hergeleitet werden, z.B. auf Seite 85 des gängigen, an unserer Schule eingeführten Lehrbuchs [4], die hier noch einmal angegeben werden.

Ist h die Höhe der Sonne über dem Horizont, φ die geographische Breite, δ die Sonnendeklination und τ der Stundenwinkel, dann gilt:

$$\sin h = \sin \delta * \sin \varphi + \cos \delta * \cos \varphi * \cos \tau$$

Im Weiteren nehme ich ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass die Sonnendeklination δ_1 negativ ist, dann ist mit $\delta = |\delta_1|$

$$(*) \qquad \sin h = - \sin \delta * \sin \varphi + \cos \delta * \cos \varphi * \cos \tau,$$

Als Spezialfälle dieser Formel (*) erhält man für die Mittagshöhe H, d.h. für $\tau = 0$, die Gleichung

$$(**) \qquad \sin H = - \sin \delta * \sin \varphi + \cos \delta * \cos \varphi .$$

Für den halben Tagbogen ergibt sich aus (*) mit h = 0^0 der Stundenwinkel τ_0 für eine negative Deklination zu

$$(***) \quad \cos \tau_0 = \tan \varphi * \tan \delta$$

Die Mittagshöhe H lässt sich aus der einfachen Relation H = $90^0 - \varphi \pm \delta$, hier also mit

$$(****) \quad H = 90^0 - \varphi - \delta,$$

berechnen.

Nach Regiomontan [2] hat das Uhrentäfelchen folgendes Aussehen:

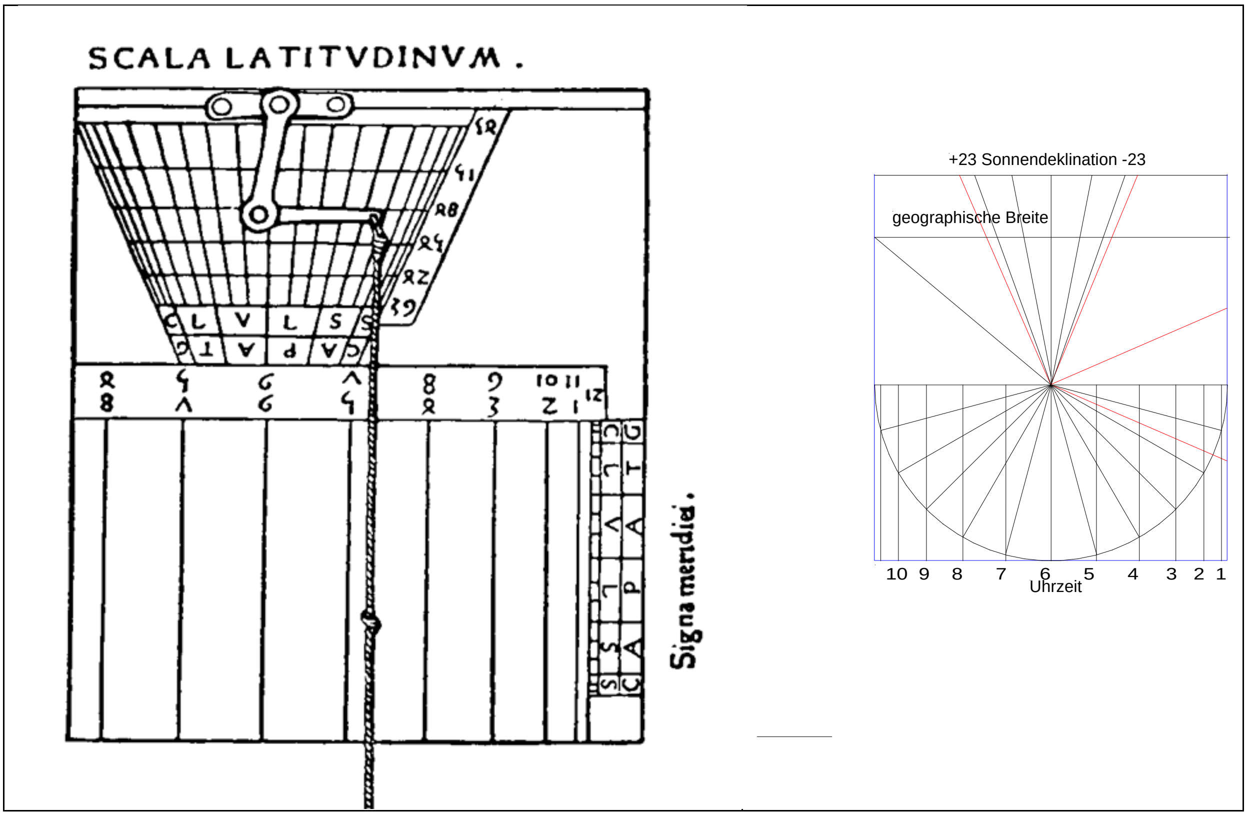

Abbildung 2: Das Allgemeine Uhrentäfelchen

Im oberen Teil des Allgemeinen Uhrentäfelchens befinden sich zwei Skalen, eine aus parallelen horizontalen Strecken für die geographische Breite des Ortes (hier von 39^0 bis 54^0 in 3^0 – Schritten) und eine weitere strahlenförmige zur Berücksichtigung der Sonnendeklination von $+23^0$ bis – 23^0, wobei die vertikale Strecke dem Äquinoktium mit $\delta = 0$ entspricht.

Man erkennt einen an zwei Scharnieren beweglichen Arm, an dem ein Faden mit einem Knoten hängt, der als Lot dient. Das Ende des beweglichen Arms muss auf die geographische Breite des Ortes – hier auf die Parallele von 48^0 - eingestellt werden. Daneben ist noch die Deklination zu berücksichtigen, die hier an den divergierenden Strecken im Bereich von 23 bis -23^0 abzulesen ist. Die Skala am unteren Ende trägt die Anfangsbuchstaben der lateinischen Tierkreisbezeichnungen und darüber eine weitere Dreiteilung, damit erhält man eine 10 –Tages - Einteilung.

Der Endpunkt des beweglichen Arms muss zusätzlich auf die Deklination der Sonne zeigen.

Man liest in Abb. 2 ab, dass seit dem Äquinoktium (vertikale Strecke) ca. 45 Tage vergangen sind; den Winkel kann man abmessen und man erhält ca. 16^0 als Wert der (negativen) Sonnendeklination.

Das Uhrentäfelchen in Abb. 2 ist so gezeichnet, dass der obere Rand, der auch als Kimme und Korn benutzt wird, horizontal eingestellt ist, d.h., die Sonnenhöhe ist $h = 0^{0,}$ es ist Sonnenaufgang oder -untergang.

Der vertikal herabhängende Faden zeigt auf der unteren der beiden Stundenskalen (von 8 bis 1 für negative Deklination) den halben Tagbogen zu ca. 4h 45min an. Somit hat man mit dem Uhrentäfelchen die Länge des gesamten Tages zu 9h 30 min bestimmt.

Zur Kontrolle rechnet man mit der Formel $\cos \tau_0 = \tan\delta * \tan\varphi$, indem man die Deklination $\delta = |\delta_1| = 16^0$ und die geographische Breite $\varphi = 48^0$ einsetzt.
Mit $\cos \tau_0 = 0{,}32$ erhält man den Winkel $\tau_0 = 71{,}3^0$ oder umgerechnet in Zeiten (1h entspricht $15^{0)}$ erhält man den halben Tagbogen zu $4^h\ 46^m$.

Der Aufbau eines Instruments stellt sich ungefähr so dar:
Die Grundplatte ist ein Rechteck mit der Seite 2r und der zweiten Seite z.B. 3r, in das zwei Strecken rechtwinklig mit dem Schnittpunkt in M eingezeichnet werden (Abb.3).
Dabei ist $\overline{LM} = \overline{MN} = \overline{MB} = r$.

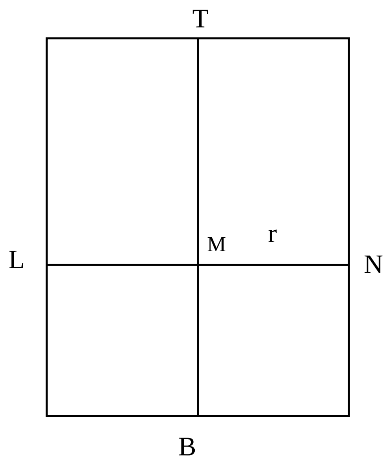

Abbildung 3

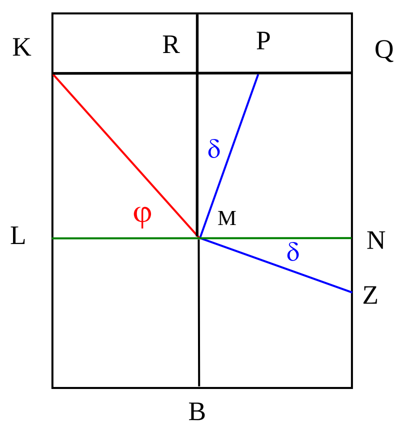

Abbildung 4

An der Strecke [ML] wird der Winkel der geographischen Breite φ angetragen und durch K eine Parallele zu [LN] gezeichnet (Abb. 4).

Die Sonnendeklination δ wird je nach Vorzeichen - hier negativ - an [MR] abgetragen, man erhält als Schnittpunkt mit der Parallele [KQ] den Punkt P; beim Abtragen an [MN] nach unten erhält man den Punkt Z.

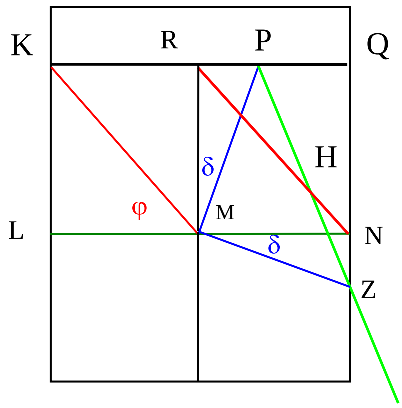

Abbildung 5

Peilt man zur Zeit der Kulmination der Sonne im Meridian das Uhrentäfelchen in Richtung der Sonne durch Kimme und Korn bei Q und K, dann fällt der Faden von P aus durch Z und der Winkel QZP ist gleich der Sonnenhöhe H zur Mittagszeit (Abb. 5).

Ich werde nun zeigen, dass durch diese einfache und raffinierte Konstruktion die Formeln (*) und (**) erfüllt sind.

Nach der Konstruktion in Abb. 4 ist $\overline{MR} = r * \tan \varphi$ und

(I) $\overline{MP} = \overline{MR} : \cos \delta = r * \tan \varphi : \cos \delta$ und

(II) $\overline{MZ} = \overline{MN} : \cos \delta$

Leicht erkennt man, dass die Dreiecke MNR (D_1) und MZP (D_2) in entsprechenden Winkeln übereinstimmen: beide Dreiecke haben jeweils einen rechten Winkel, dazu ist das Verhältnis der Katheten im Dreieck D_1 und D_2 gleich.

Mit dem Winkel RNM = φ gilt im Dreieck D_1

(III) $\tan \varphi = \overline{MR} : \overline{MN}$

Im Dreieck D_2 ergibt sich für die entsprechenden Seiten mit (I) und (II)

$\overline{MP} : \overline{MZ} = (\overline{MR} : \cos \delta) : (\overline{MN} : \cos \delta) = \overline{MR} : \overline{MN}$

mit (III) gilt daher

$\overline{MP} : \overline{MZ} = \tan \varphi$, also ist

der Winkel PZM gleich der geographischen Breite φ.

Im rechtwinkligen Dreieck MZN (Abb.5) hat man bei Z den Winkel (90 - δ) und erhält den Zusammenhang

$\varphi + H = 90 - \delta$ oder **$H = 90 - \varphi - \delta$,**

das ist gerade - wie anfangs erläutert - die Mittagshöhe der Sonne im Meridian (****).

Wichtig für die weiteren Überlegungen ist die Länge der Strecke $\overline{PZ}$, die man im rechtwinkligen Dreieck MZP (Abb.5) aus
cos φ = $\overline{MZ} : \overline{PZ}$ oder $\overline{PZ} = \overline{MZ}$: cos φ und mit (II) $\overline{MZ}$ = r : cos δ zu

(IV) $\overline{PZ}$ = r : (cos φ * cos δ)

erhält.

Jetzt lässt sich die Mittagshöhe H der Sonne nach der bekannten Formel (**) angeben.

Mit sin H = $\overline{PQ} : \overline{PZ}$ aus Abb. 5 und $\overline{PQ}$ = r - $\overline{RP}$ = r - $\overline{MR}$ * tanφ oder
$\overline{PQ}$ = r - r* tanδ * tanφ und (IV) erhält man
sin H = (1 - tanδ * tanφ) *(cos δ *cos φ) oder vereinfacht

sin H = cos φ * cos δ - sin δ * sin φ,

Dies ist genau die Formel (**) für die Mittagshöhe H der Sonne mit negativer Deklination, d.h., die Konstruktion folgt den exakten Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Zur Bestimmung einer beliebigen Tageszeit wird zuerst die Position der Perle für diesen Tag im Punkt Z fest eingestellt, d.h., der Punkt Z bewegt sich im Weiteren auf einem Kreis um P mit dem Radius $\overline{PZ}$ (Abb. 6).

Peilt man bei bestimmter geographischer Breite φ und fester Sonnendeklination δ zu einer beliebigen Tageszeit mit dem Täfelchen in Richtung der Sonne mit der Höhe h, dann liest man mit der Perle an der Stundenlinie bei Z´ die Uhrzeit ab (Abb. 2).

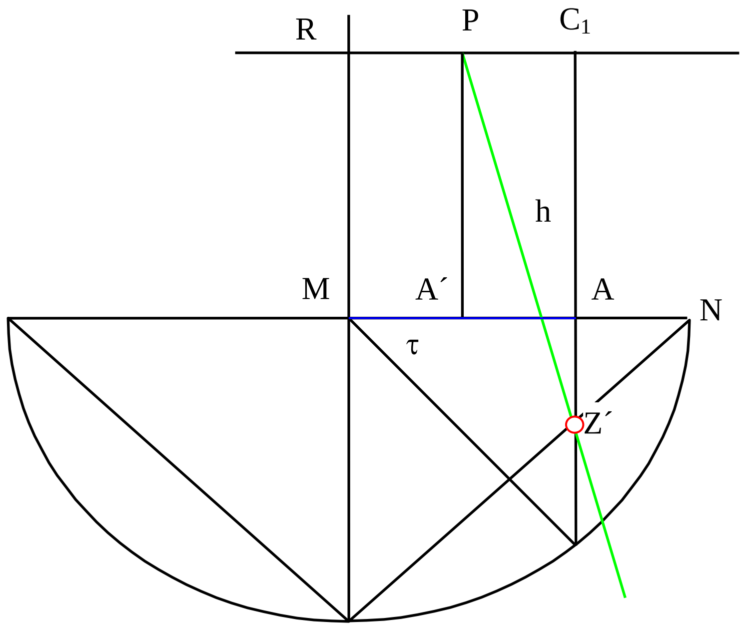

Abbildung 6

Auf der Strecke [MN] ist der Kosinus des Stundenwinkels τ in Schritten von z.B. 15^0, das entspricht einer Zeitstunde, in ersichtlicher Weise (Abb. 6) in dem Täfelchen angetragen. Es gilt

Ausgehend von (VI) $\overline{MA}$ = r * cos τ und für die Berechnung nützlich $\overline{MA} = \overline{RC}$ berechnet man

sin h = $\overline{PC} : \overline{PZ'}$

mit $\overline{PC} = \overline{RC} - \overline{PR}$, (VI) und $\overline{PR}$ = r * tanδ * tanφ (Abb. 5) gilt:

$\overline{PC}$ = r* cos τ - r* tanδ * tanφ = r * (cos τ - tanδ * tanφ)

und wegen (IV)

$\overline{PZ'} = \overline{PZ}$ = r : (cos δ *cos φ)

erhält man

sin h = (cos τ - tanδ * tanφ) *(cos δ *cos φ)

oder vereinfacht

sin h = cos τ * cos δ*cos φ - sin δ * sin φ ,

die allgemeine Formel (*) für eine beliebige Höhe h und negativer Deklination, wie zu zeigen war.

Auch die Länge des halben Tagbogens - Höhe h = 0^0 - lässt sich mit dem Täfelchen bestimmen. Dazu wird das Instrument horizontal gehalten und man liest den entsprechenden Stundenwinkel τ_0 - wie in Abb. 2 angegeben - ab. Der Faden schneidet die Strecke [MN] in A´ (Abb. 6), aus den oben hergeleiteten Beziehungen ergibt sich sofort die gesuchte Beziehung.

Mit $\overline{MA'}$ = r *cos τ_0 , $\overline{MA'}$ = $\overline{RP}$ und $\overline{RP}$ = r* tanδ * tanφ
erhält man
r *cos τ_0 = r* tanδ * tanφ
oder
cos τ_0 = tanδ * tanφ
die bekannte Formel (***) für eine negative Deklination.

Das einzigartig konstruierte Uhrentäfelchen hat wegen seiner relativ einfachen, aber durchdachten Geometrie unter den tragbaren Sonnenuhren eine weitreichende Verbreitung und Anwendung als Universalinstrument gefunden. Viel von der Faszination, die das Instrument heute noch auf einen Benutzer und Betrachter ausübt, liegt in seinem genialen Aufbau.
Herr Brunhold, ein Astrolabienmacher aus der Schweiz, stellt in seinem Katalog [5] einen handwerklich und wissenschaftlich einwandfreien Nachbau solcher Geräte vor.

Literatur:

[1] Mett, Rudolf, Regiomontanus, Wegbereiter des neuen Weltbildes, Teubner, Stuttgart 1996

[2] Zinner, Ernst (Hrsg.): Der deutsche Kalender des Johannes Regiomontan, Nürnberg um 1474 [Faksimiledruck]. Leipzig 1937
.
[3] Runge, Sphärische Trigonometrie, BSV, München 1986

[4] Rohr, Rene, Die Sonnenuhr, 1982, Seite 142 mit mehreren Abbildungen und einer kurzen mathematischen Begründung

[5] Katalog von Martin Brunhold, Astrolabienmacher, CH-5646 Abtwil Aargau/ Schweiz